~ Les Coniques ~

1 Introduction

Képler (1571-1630) a découvert que les planètes avaient pour trajectoire des courbes étudiées et répertoriées par le Grec Apollonios dix-huit siècles plus tôt ! Ces sections coniques, ou plutôt coniques sont présentées ici sous deux aspects essentiels :
* l'aspect géométrique, en tant que lignes de niveau (définition par foyer, directrice et excentricité) ;
* l'aspect algébrique, comme courbes définies par certaines équations du second degré.
Pour l'exécution de stracés, nous reconnaîtrons dans ces coniques des courbes représentatives définies par une équation cartésienne ou polaire.

2 Définitions

2.1 Définition 1

Soit F un point fixe, $\mathcal{D}$ une droite fixe et e un réel strictement positif avec $F \notin \mathcal{D}$. Pour tout point M du plan, on note H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$. L'ensemble $\mathcal{C}$ des points M du plan vérifiant $\dfrac{MF}{MH} = e$ est appelé conique de ***foyer*** F, de ***directrice*** $\mathcal{D}$ et d'***excentricité*** e. Cette conique est appelée :
- Parabole lorsque $e = 1$.
- Ellipse lorsque $0 < e < 1$.
- Hyperbole lorsque $e > 1$.

2.2 Définition 2

Soit $\mathcal{C}$ une conique de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$. On appelle ***axe focal*** de $\mathcal{C}$ la droite Δ perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par F.

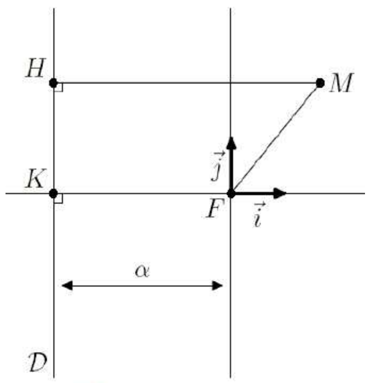
2.3 Propriété 1

Toute conique admet un ***axe de symétrie*** : son axe focal.
En effet : Soit M un point de $\mathcal{C}$ On note $s_\Delta(M) = M'$ et $s_\Delta(H) = H'$ Comme $\Delta \perp \mathcal{D}$, $H' \in \mathcal{D}$ et $(H'M') // \Delta$, puisque $(HM) // \Delta$. Il en résulte que H' est le projeté orthogonal de M' sur $\mathcal{D}$. Enfin $\dfrac{M'F}{M'H'} = \dfrac{MF}{MH} = e$ donc $M' \in \mathcal{C}$.

2.4 Propriété 2

L'axe focal d'une conique $\mathcal{C}$ rencontre cette conique en :
- Un unique point S appelé sommet (dans le cas de la parabole).
- Deux points distincts S et S' appelés sommets (dans le cas d'une hyperbole ou d'une ellipse).

Cherchons les points (éventuels) d'une conique $\mathcal{C}$ situés sur son axe focal. Si un tel point existe on l'appellera sommet. Si K est le point dfintersection de l'axe focal et de la directrice, ces points$M$ vérifient : $\dfrac{MF}{MK} = e$ L'ensemble de ces points est :
- Si $e = 1$, la médiatrice de $[FK]$: un seul sommet S, le milieu de $[FK]$.
- Si $e \neq 1$, un cercle centré sur (FK) : Deux sommets S et S', S étant le barycentre de $(F, 1)$ et (K, e) et S' celui de $(F, 1)$ et $(K, -e)$.



éléments d'une conique

2.5 Définition

La distance FK est dite paramètre de la conique notée p.

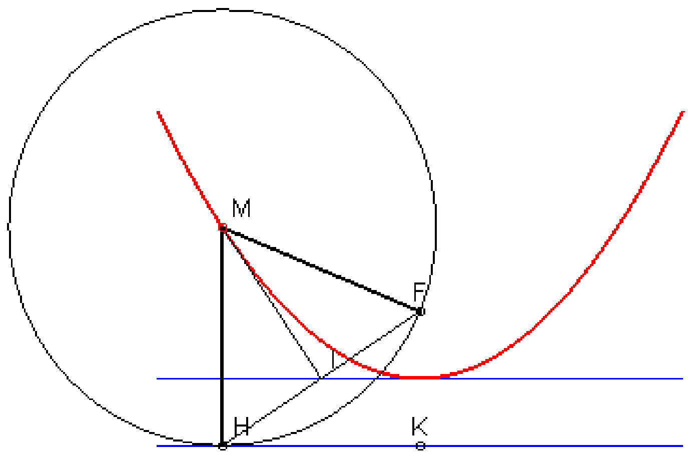
3 Parabole

3.1 Définition 1

C'est le cas où $e = 1$ c-à-d $\dfrac{MF}{MH} = 1 \Longleftrightarrow MH = MF$ (H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$) donc une parabole est l'ensemble des points équidistants de F et de $\mathcal{D}$.

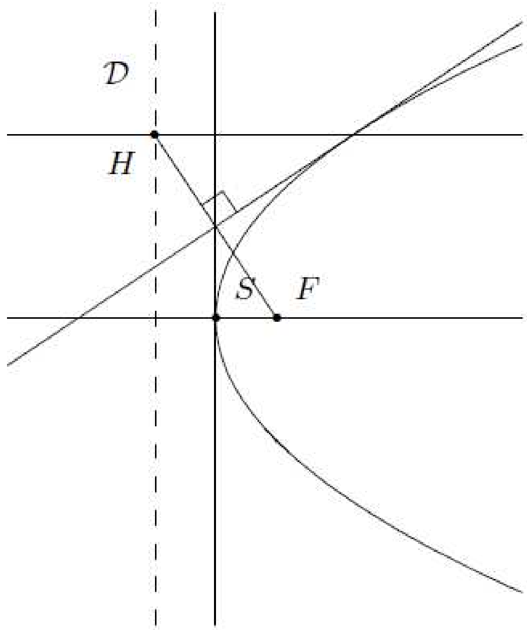
3.2 Définition 2

Une parabole est l'ensemble des centres des cercles passant par F et tangents à la directrice



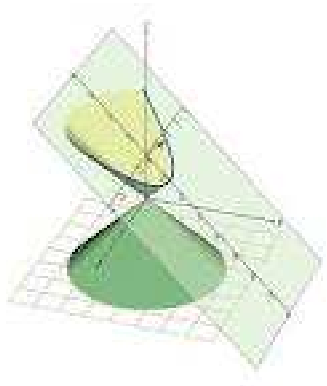
3.3 Construction d'un point d'une parabole

Etant donné le foyer F et la directrice $\mathcal{D}$ de la parabole $\mathcal{P}$
- Soit Δ la droite ne passe pas par F et perpensiculaire à $\mathcal{D}$ en H.
- Sur $\mathcal{D}$ il existe un seul point $M \in \mathcal{P}$ (*d'aprés la définition 2*).
- Or $M \in \mathcal{P} \Longleftrightarrow MH = MF \Longleftrightarrow M \in$ mediatrice de $[FH]$
- D'où $M = \Delta \cap$ méd$[FH]$.



3.4 Définition 3

Une parabole est définie comme étant l'intersection d'un cône et d'un plan. la parabole est obtenue lorsque le plan est parallèle à l'une des génératrices du cône.



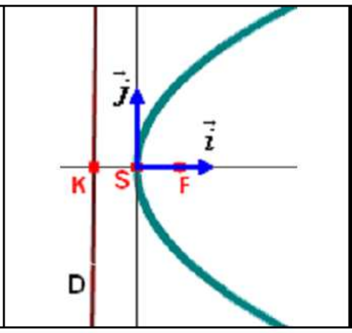
3.5 Equation réduite d'une parabole

Soit $\mathcal{P}$ une parabole de paramètre p, de directrice $\mathcal{D}$, de foyer F et de sommet S. Soit $\vec{i} = \frac{1}{SF}\overrightarrow{SF}$ et $(S, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct. On pose $K = \mathcal{S}_S(F)$, c-à-d $KS = \frac{1}{2}p$, donc $K\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ et $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ et par suite $\mathcal{D} : x = \frac{1}{2}p$.
Soit $M(x, y)$ un point du plan et soit H sont projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$: $H\left(-\frac{p}{2}, y\right)$ on a :
$M \in \mathcal{P}$ si et seulement si $MH = MF \Leftrightarrow MH^2 - MF^2 = 0$.
Or $MH^2 - MF^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 - \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = y^2 - 2px$.
donc $M \in \mathcal{P} \Longleftrightarrow y^2 - 2px$
$\Longleftrightarrow$ $\boxed{y^2 = 2px.}$ c'est ***l'équation réduite*** de la parabole $\mathcal{P}$.
Réciproquement : L'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $y^2 = 2px$, $(p > 0)$ est la parabole de directrice $x = -\frac{p}{2}$ et de foyer $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

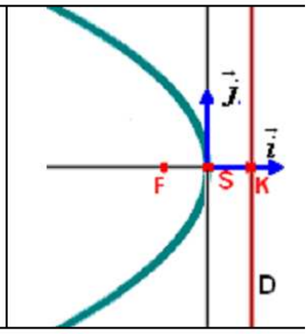
3.6 Remarque

Quatre cas sont présentés :

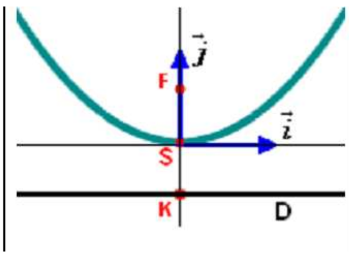
Equation réduite: $y^2 = 2px$
Directrice D: $x = -\frac{p}{2}$
Foyer $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.



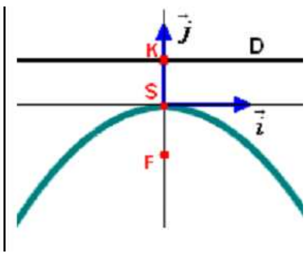
Equation réduite: $y^2 = -2px$
Directrice: $x = \frac{p}{2}$;
Foyer $F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$.



Equation réduite: $x^2 = 2py$
Directrice D : $y = -\frac{p}{2}$
Foyer $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$



Equation réduite: $x^2 = -2py$
Directrice D : $y = \frac{p}{2}$
Foyer $F\left(0, -\frac{p}{2}\right)$



3.7 Exercice corrigé

3.7.1 Énoncé

Identifier les paraboles suivantes :

1. $x = -3x^2$.
2. $y = 6x^2$.
3. $x = 4y^2 + 8y + 3$.
4. $y^2 - 4(x - y) + 8 = 0$.

3.7.2 Solution

1. $x = -3y^2 \iff y^2 = -\dfrac{x}{3} \iff y^2 = -2 \times \dfrac{1}{6}x$, d'où $p = \dfrac{1}{6}$.
   Il s'agit donc d'une parabole de foyer $F\left(-\dfrac{1}{12}, 0\right)$, de sommet $(0,0)$ et de directrice $x = \dfrac{1}{12}$.
2. $y = 6x^2 \iff x^2 = \dfrac{1}{6}y \iff x^2 = 2 \times \dfrac{1}{12}y$, d'où $p = \dfrac{1}{12}$.
   Il s'agit donc d'une parabole de foyer $F\left(0, \dfrac{1}{24}\right)$, de sommet $(0,0)$ et de directrice $y = -\dfrac{1}{24}$.
3. $x = 4y^2 + 8y + 3 \iff x = 4(y^2 + 2y) + 3 \iff x = 4(y+1)^2 - 1 \iff x + 1 = 4(y+1)^2$, on pose $\mathcal{X} = x + 1$ et $\mathcal{Y} = y + 1$ l'équation devient : $\mathcal{X} = 4\mathcal{Y}^2 \iff \mathcal{Y} = 2.\dfrac{1}{8}\mathcal{X}$.
   D'où il s'agit d'une parabole de foyer $F\left(\dfrac{1}{16}, 0\right)$ dans le repère $\mathcal{R}' = (\Omega(-1,-1), \vec{i}, \vec{j})$ donc $F\left(\dfrac{1}{16} - 1, 0 - 1\right)$ dans le repère $\mathcal{R} = (S, \vec{i}, \vec{j})$ et de directrice $\mathcal{X} = -\dfrac{1}{16}$ dans $\mathcal{R}'$ devient $x = -\dfrac{1}{16} - 1 = -\dfrac{17}{16}$ dans le repère $\mathcal{R}$.
4. $y^2 - 4(x - y) + 8 = 0 \iff y^2 + 4y - 4x + 8 = 0 \iff (y+2)^2 = 4(x-1) = (y+2)^2 = 2.2(x-1)$, d'où $p = 2$. Il s'agit d'une parabole de foyer $F(2, -2)$ et de directrice $x = 0$.

3.8 Tangentes à une parabole

3.8.1 Équation de la tangente à une parabole

Etudions le cas où la forme réduite de la parabole est $x^2 = 2py$ c-à-d $\left(y = \dfrac{x^2}{2p}\right)$.

Considèrons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^2}{2p}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{x}{p}$ par la suite la parabole admet en tout point $M(x_0, y_0)$, $(x_0 \in \mathbb{R})$ une tangente d'équation : $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)} \iff y = \dfrac{x}{p}(x - x_0) + y_0 \iff y - y_0 = \dfrac{xx_0}{p} - \dfrac{x_0^2}{p} \iff y - y_0 = \dfrac{xx_0}{p} - 2y_0$ (puisque $y_0 = f(x_0) = \dfrac{x_0^2}{p}$) Enfin on trouve $y + y_0 = \dfrac{xx_0}{p} \iff p(y + y_0) = xx_0$ (*dédoublement des termes*), d'où $\boxed{y = \dfrac{xx_0}{p} - y_0}$.

3.8.2 Théorème

Le planest rapporté orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit p un réel strictement positif.

- Si $\mathcal{P}$ est la parabole d'éqution $y^2 = 2px$, alors la tangente à $\mathcal{P}$ en un point $M_0(x_0, y_0)$ est la droite d'équation $y_0y_{=}p(x + x_0)$.
- Si $\mathcal{P}$ est la parabole d'éqution $x^2 = 2py$, alors la tangente à $\mathcal{P}$ en un point $M_0(x_0, y_0)$ est la droite d'équation $x_0x_{=}p(y + y_0)$.
- Si $\mathcal{P}$ est la parabole d'éqution $y^2 = -2px$, alors la tangente à $\mathcal{P}$ en un point $M_0(x_0, y_0)$ est la droite d'équation $y_0y_{=} - p(x + x_0)$.
- Si $\mathcal{P}$ est la parabole d'éqution $x^2 = -2py$, alors la tangente à $\mathcal{P}$ en un point $M_0(x_0, y_0)$ est la droite d'équation $x_0x_{=} - p(y + y_0)$.

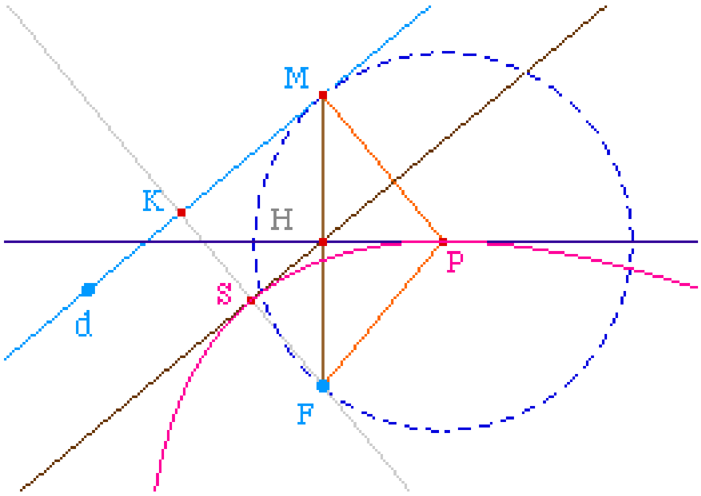
3.8.3 Remarque

- Si $\mathcal{P}$ est d'équation $y^2 = 2px$ alors la tangente au sommet est d'équation $x = 0$.
- Si $\mathcal{P}$ est d'équation $x^2 = 2py$ alors la tangente au sommet est d'équation $y = 0$.

3.8.4 Propriétés d'une tangente

$\mathfrak{P}_1$: Le symétrique du foyer par rapport à une tangente à une parabole appartient à la directrice de cette parabole.

$\mathfrak{P}_1$ **:** Soit $\mathcal{T}_0$ le point d'intersection de la directrice et la tangente à une parabole en un point $\mathcal{M}_0$, alors l'angle géométrique $\widehat{\mathcal{T}_0\mathcal{F}\mathcal{M}_0}$ est droit.



3.9 Exercice corrigé

3.9.1 Énoncé

Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y^2 = 8x$. dans un repère orthonormé (O, i, j).

1. (a) Vérifier que le point $A\left(1, 2\sqrt{2}\right) \in \mathcal{P}$.
   (b) Donner une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{P}$ en A.
2. Déterminer les tangentes éventuelles à $\mathcal{P}$ menées de point $B(0, 2)$.

3.9.2 Solution

1. (a) $\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8 = 8 \times 1$.
   (b) $y^2 = 8x = 2 \times 4x$ donc $p = 4$. $\mathcal{T}$ a pour équation : $yy_0 = p(x + x_0)$ où $x_0 = 1$ et $y_0 = 2\sqrt{2}$. Ce qui donne que que $2\sqrt{2}y = 4(x + 1)$. ou encore $y = \sqrt{2}(x + 1)$.
2. Soit $M(a, b) \in \mathcal{P}$, la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{P}$ en M passe par $B(0, 2)$.
   On sait que la tangente admet pour équation $yb = p(x + a) = 4(x + a)$. Or $B \in \mathcal{T}$ donc $2b = 4a \iff b = 2a$. En plus $M(a, b) \in \mathcal{P}$ donc $b^2 = 8a$. les deux équations donnent que $a = 0$ et $b = 0$ ou $a = 2$ et $b = 4$. et ainsi on a :
   – La tangente à l'origine à pour équation $x = 0$.
   – La tangente au point $M(2, 4)$ à pour équation $y = x + 2$.

3.10 Exercices

3.10.1 Exercice 1

Soit $\wp$ la conique d'équation $y^2 = 4x$. Cocher les bonnes réponses :

1. $\wp$ a pour foyer $\mathcal{F}(2, 0)$.
2. $\wp$ est l'ensemble des points équidistant à $\mathcal{F}(1, 0)$ et à $\mathcal{D} : x = -1$.
3. Le paramètre de $\wp$ est 2.
4. $(O, \overrightarrow{j})$ est une tangente à $\wp$.

3.10.2 Exercice 2

Soit $(\mathscr{P})$ la parabole d'équation $y^2 = 2px$ dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, une droite $\mathscr{D}$ de vecteur directeur $\alpha\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ passe par le foyer F de $(\mathscr{P})$ et coupe cette parabole en deux points M' et M''.

1. Déterminer en fonction de α les coordonnées de milieu K de $[M'M'']$.
2. Déterminer l'ensemble des points K lorsque α décrit $\mathbb{R}$.